Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике 2009/2010 учебный год

11 класс

Задача 1

К Андрею на дачу должен приехать друг, чтобы помочь ему выкопать картошку. Чтобы встретить друга Андрей выехал с дачи на машине так, чтобы приехать на станцию к электричке, прибывающей в 13.00. По пути он встретил друга, идущего к даче пешком, поскольку он приехал на электричке, прибывшей на час раньше, и решил сам идти к даче. В результате друзья приехали на дачу на 30 мин раньше. Определить время встречи Андрея с другом.

Задача 2

Найти все решения неравенства $\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, лежащие в интервале $\left(-\frac{83}{20}; 0\right)$.

Задача 3

В параллелограмме со сторонами 3 и 5 проведены биссектрисы четырех внутренних углов. Найти отношение площади четырехугольника, образовавшегося при пересечении биссектрис, к площади параллелограмма.

4.11.2010 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Определить все значения параметра a, при которых уравнение $x+\sqrt{x\,(a-x)} = 1$ имеет хотя бы одно решение.

5.11.2010 ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА ДЕЛИМОСТЬ

Известно, что натуральные числа a, b удовлетворяют двум условиям:

– сумма a и b равна 555,

– наименьшее общее кратное a и b в 26 раз больше, чем их наибольший общий делитель.

Найти a и b.

6.11.2010 (+ аналог 6.10.2010) НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

На числовой прямой отложены точки с координатами $a_k = k \cdot \sqrt{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ Вправо от точки 0, откладывается отрезок, длина которого меняется, причем каждый следующий раз отрезок откладывается от конца предыдущего отрезка. Начальная длина отрезка равна 1. Если отрезок, отложенный в очередной раз, закрывает менее 5 точек a_k, то длина отрезка увеличивается на 1, если более 5 точек – уменьшается на 1, если же отрезок закрывает ровно 5 точек a_k, то его длина остается прежней. Верно ли, что, начиная с некоторого момента времени, длина откладываемого отрезка будет постоянной? Ответ обосновать.

10 класс

Найти все числа x, y, при которых верно равенство

$$4x^2 - 4xy\sqrt{5} + 6y^2 + 2y\sqrt{7} - \frac{2y}{\sqrt{7}} + \frac{43}{7} = 1.$$

2.10.2010 (+5.9.2010) ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть две последовательности чисел $(x_0, x_1, \ldots, x_{2010})$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{2010})$ составлены по следующим правилам:

а) $x_0 = 3,\ x_1 = \frac{1}{2},\ y_0 = 1,\ y_1 = \frac{1}{6}$,

б) $x_{i+1} = x_{i-1} + 5x_i$ и $y_{i+1} = y_{i-1} - 5y_i$ для $i = 1, \ldots, 2009$.

Вычислить величину $x_{2010}y_{2009} + x_{2009}y_{2010}$.

3.10.2010 (см. 2.11.2010)

4.10.2010 (см. 3.11.2010)

5.10.2010 (+6.9.2010) СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^2} + \frac{y}{x} = 5 \\ \frac{8y}{x^2} - \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

6.10.2010 (аналог 6.11.2010)

9 КЛАСС

1.9.2010 ПЛАНИМЕТРИЯ

Квадрат 100 на 100 разбит двумя горизонтальными и двумя вертикальными прямыми на 9 прямоугольников. Стороны центрального прямоугольника равны 35 и 40. Найти суммарную площадь четырех угловых прямоугольников.

2.9.2010 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ (УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ)

Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{|x+3|^2} = 7$.

3.9.2010 ЛОГИКА, ПЛАНИМЕТРИЯ

Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников? Ответ обосновать.

4.9.2010 (см. 1.11.2010)

5.9.2010 (см. 2.10.2010)

6.9.2010 (см. 5.10.2010)